Compléter les phrases suivantes par car et/ou donc

1. J'ai eu un pv .... j'ai grillé un feu rouge.
2. Pierre est absent .... il est malade.
3. C'est mon anniversaire .... j'ai reçu un cadeau.
4. Il pleut .... je prends mon parapluie.
5. Je suis européen .... je suis belge.
6. Je ne suis pas européen .... je ne suis pas belge.
7. EFGH est un parallèlogramme .... (EF) et (GH) sont parallèles.
8. EFGH est un parallèlogramme .... les diagonales de coupent en leurs milieux.
9. $1 - x > 0$ .... $x < 1$.
10. x est supérieur à 5 .... x est supérieur à 1.5.
11. Le quadrilatère $EFGH$ a deux côtés de même longueurs .... $EFGH$ est un losange.
12. Le cercle de centre O et de rayon R contient le point M .... $OM = R$.

On rappelle qu'en **logique mathématique**, une proposition est dite « **vraie** » si elle est toujours vérifiée et est dite « **fausse** » s'il existe au moins un cas qui la rend fausse.
Le symbole $\Rightarrow$ signifie **implique**.

Remarques :

- la proposition $x > 1 \Rightarrow x > 0$ est vraie par contre la proposition $x \geq 1 \Rightarrow x^2 > 1$ est fausse car on peut prendre le contre-exemple $x = 1$, « $x^2 > 1$ » est faux car $x^2 = 1$ dans ce cas.
- La formulation **Si A alors B** signifie si la proposition A est vraie alors la proposition B est vraie.
- La formulation **Si A alors B** est **équivalente** à la proposition $A \Rightarrow B$ (A implique B).
  équivalente signifie ici si l'une est vraie l'autre aussi, si l'une est fausse l'autre aussi.
- On dit que deux propositions A et B sont **équivalentes**, et on note $A \Leftrightarrow B$ si $\begin{cases} A \Rightarrow B \text{ (et)} \\ B \Rightarrow A \end{cases}$
- ✘✘✘ ATTENTION ! Démontrer que $A \Rightarrow B$ ne nous dit pas si B est vraie car on ne sait pas si A est vraie, en fait on a :

$$\left[\text{A vraie et } A \Rightarrow B\right] \Rightarrow \text{B est vraie}$$

Si...alors... et réciproque
Une déduction logique se présente souvent sous la forme **Si...alors...**
Exemple : **Si un animal est un oiseau alors il a deux ailes.**
On énonce alors la proposition réciproque (sans se demander si elle est vraie ou non)
Si un animal a deux ailes alors c'est un oiseau.

Écrire la réciproque de chacune des déductions/implications.

Parmi toutes ces déductions et réciproques, déterminer si elles sont vraies ou fausses. Pour les propositions mathématiques, lorsqu'elles sont fausses, on attend un contre-exemple (=exemple concret qui met en défaut la proposition) et lorsqu'elles sont vraies, on attend une démonstration.

1. Si un animal a quatre pattes alors c'est un chien.
2. Si un animal est capable de voler alors c'est un oiseau.
3. Si un véhicule est capable de voler alors il a des ailes.
4. Si un véhicule a quatre roue alors c'est une voiture.
5. Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$
6. Si ABC a deux angles égaux à 60° alors il est équilatéral.
7. Si (u_n) est convergente alors elle est bornée.
8. Pour x, y, z réels, si $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ alors $x = y = z = 0$.

Les mots **propositions, assertions et affirmations** sont des synonymes. Ils désignent un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Théorème . L'équivalence de deux propositions.
Deux propositions A et B sont dites **équivalentes** si $[A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A]$

On note alors $A \Leftrightarrow B$, cela signifie que A et B sont vraies en même temps et fausses en même temps.
✖✖ REMARQUE Les expressions « **équivaut à** », « **si et seulement si** », « **il faut et il suffit que** » ont le même sens.
Exemple : Un quadrilatère non-croisé est un losange si et seulement si ces quatres côtés sont de même mesure.

Écrire la négation des phrases suivantes (en logique mathématique) :

- P1 Ma voiture est rouge.
- P2 Mon voisin n'est pas chauve.
- P3 Ma voiture est rouge et mon voisin est chauve.
- P4 Ma voiture est rouge ou bleue.
- P5 La nuit, tous les chats sont gris.
- P6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$.
- P7 x est supérieur à 5 et inférieur à 10.
- P8 x est inférieur à 6 ou supérieur à 12.
- P9 Il existe un entier n tel que $2^n > 1048$.
- P10 Si un entier n est pair alors n^2 est un entier pair.

Théorème Principe du tiers exclu
L'assertion (A ou non A) est vraie.

✖✖ REMARQUE Cela signifie que pour tout assertion A, on doit accepter soit A, soit sa négation comme vraie.

Théorème
Une proposition A est vrai si et seulement si la proposition non A est fausse.

La contraposée d'une implication $A \Rightarrow B$ est non **B** $\Rightarrow$ non **A**.
En utilisant les symboles de logique, la négation d'une proposition A est notée $\neg A$ et la contraposée de $A \Rightarrow B$ alors s'écrit : $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Écrire les contraposées de chacune des implications suivantes.

1. Si un animal a des ailes alors c'est un oiseau.
2. Si un animal est capable de marcher alors il a des pattes.
3. Si un véhicule est capable de voler alors il a des ailes.
4. Si un véhicule a deux roues alors c'est une moto.

1. Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$
2. Si (u_n) est convergente alors elle est bornée.
3. Pour x, y, z réels, si $x^4 + y^6 + z^8 = 0$ alors $x = y = z = 0$.

Théorème
Une implication est équivalente à sa contraposée.

✖✖ REMARQUE cela signifie qu'une implication et sa contraposée sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

En pratique Si on n'arrive pas à démontrer une implication, on peut toujours essayer de démontrer sa contraposée (qui lui est équivalente).