

Prérequis impératifs.

Il faut savoir et s'entraîner à :

- résoudre des équations et des inéquations du premier et second degré.
- résoudre des équations et des inéquations avec des racines carrées.
- résoudre des équations et des inéquations avec des logarithmes ou exponentielles.

1 Etude d'ensembles de définition

1.1 Principes d'étude

Tout d'abord revenons à la définition : soit x un nombre réel, la fonction f est définie en x si $f(x)$ existe.

On dira que f est définie sur un ensemble I si $f(x)$ existe pour tout $x \in I$.

Toute valeur x pour laquelle $f(x)$ n'existe pas s'appelle une **valeur interdite** pour la fonction f .

Trois problèmes peuvent survenir lors de l'étude de l'ensemble de définition d'une fonction :

- **On ne peut pas diviser par 0** ; ce qui se traduit par $x \mapsto \frac{a(x)}{b(x)}$ n'est définie que si $b(x) \neq 0$.

Méthode : déterminer les valeurs interdites revient à résoudre l'équation $b(x) = 0$.

- **on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif** : $x \mapsto \sqrt{c(x)}$ n'est définie que si $c(x) \geq 0$.

Méthode : on résout l'inéquation $c(x) \geq 0$.

- **on ne peut pas prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul** : $x \mapsto \ln(u(x))$ n'est définie que si $u(x) > 0$.

Méthode : on résout l'inéquation $u(x) > 0$.

***** ATTENTION !** parfois ces problèmes se combinent, il faut tenir compte de chaque contrainte.

Exemples d'étude de fonctions avec des fractions

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x}{2x-1}$

5. $\ell(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 1} - \frac{5x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 2x - 1}$

2. $g(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

6. $i(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

3. $h(x) = \frac{2x^2 - 1}{4x - 1} + \frac{2}{4x + 1}$

7. $j(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 2x - 1}$

4. $k(x) = \frac{x}{x^2 + 4x - 8}$

Exemple 1 de correction

Prenons par exemple la fonction h ci-dessus. Elle comporte deux divisions ce qui nous donne deux contraintes :

$$\begin{cases} 4x - 1 \neq 0 \\ 4x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{4} \\ x \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right\}$.

✖✖ REMARQUE on peut définir une fonction en plusieurs morceaux comme, par exemple,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Alors f est définie sur $\mathbb{R}$ car tout réel x possède une image, ici $f(3) = 1$.

Exemples d'étude de fonctions avec des racines carrées

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x-1}$
2. $g(x) = \sqrt{x^2-1}$
3. $h(x) = 3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{4x-1}$
4. $\ell(x) = \sqrt{5x^2-4x-1}$
5. $u(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}$
6. $v(x) = \sqrt{1-x^2}$
7. $w(x) = \sqrt{1+x^2}$
8. $z(x) = 3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{1-4x}$

Exemple 2 de correction

Prenons par exemple la fonction h ci-dessus, Elle comporte deux racines carrées ce qui nous donne deux contraintes :

$$\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ 4x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{4} \\ x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

Ainsi, l'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \left[\frac{1}{4}; +\infty[$.

Exemples d'étude de fonctions avec des logarithmes

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x-1)$
2. $g(x) = \ln(x^3-1)$
3. $h(x) = 7\ln(2x+1) - 2\ln(1-2x) + \ln(x)$
4. $\ell(x) = \ln(4x^2-5x+1)$
5. $v(x) = \ln(4-x^2)$
6. $u(x) = \ln(2-x) + \ln(x+2)$
7. $w(x) = \ln(x^2+x+1)$

Exemple 3 de correction

Prenons par exemple la fonction h ci-dessus. Elle comporte trois logarithmes ce qui nous donne trois contraintes :

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 1-2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$$

Ainsi, l'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h =]0; \frac{1}{2}[$.

Combinons ces contraintes

Une fois que vous **maîtrisez** les exemples précédents, vous pouvez chercher l'exercice suivant. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x+1}$$

$$2. g(x) = \frac{x+1}{\ln(x-1)}$$

$$3. h(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\ln(x)}}$$

$$4. u(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(4-x)}$$

$$5. v(x) = \sqrt{|x|} + \ln(|x|)$$

$$6. w(x) = \begin{cases} \ln(x-3) & \text{si } x > 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$7. \ell(x) = \sqrt{x+1} + \ln(1-x)$$

$$8. z(x) = \sqrt{\ln^2(x) - 1}$$

$$9. t(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}} + \lfloor x \rfloor.$$

Exemple 4 de correction

Prenons par exemple la fonction u ci-dessus. Elle comporte une division, une racine carrée et un logarithme ce qui nous donne trois contraintes :

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x > 0 \\ \ln(4-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 4 \\ 4-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 4 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 4 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de u est $\mathcal{D}_u = [1; 4[\setminus \{3\} = [1; 3[\cup]3; 4[$.

2 Ensembles de dérivabilité.

Nous ne traitons pas ici le cas de la dérivabilité en un point qui sera vu ultérieurement.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D . Notons D' l'ensemble de dérivabilité.

Rappelons que $x \in D'$ signifie que f est dérivable en x .

D'abord f ne peut être dérivable en un réel x que si elle y est définie, ainsi D' est nécessairement un sous-ensemble de D , ce qui se traduit par l'inclusion $D' \subset D$.

Quelles sont d'abord les fonctions ne posant aucun problème :

- les **polynômes** sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'un polynôme est une fonction de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où les a_i sont des constantes réelles.

Exemples de polynômes : $x \mapsto 1$, $x \mapsto 2x - 1$, $x \mapsto 7x^2 - 5x + 3 \dots$

Ce sont des *combinaisons linéaires de fonctions puissances entières*.

- la fonction **exponentielle** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles $= \frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}$ sont dérivables sur leur ensemble de définition, ie $D' = D$.

Trois fonctions posent réellement un problème :

- la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0

Méthode : $x \mapsto |u(x)|$ n'est pas dérivable en x si $u(x) = 0$.

- la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Méthode : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ n'est pas dérivable en x si $u(x) \leq 0$.

- (plus rare) La fonction partie entière n'est pas dérivable en chaque entier relatif.

Méthode : $x \mapsto \lfloor u(x) \rfloor$ n'est pas dérivable en x si $u(x)$ est un entier.

Ce problème se rencontre quand même beaucoup plus rarement.

Il s'agit d'abord de bien comprendre les deux premiers cas.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$5. v(x) = |x^2 - 1|$$

$$2. g(x) = \frac{x+1}{\ln(x-1)}$$

$$6. w(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

$$3. h(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

$$7. \ell(x) = \sqrt{x+1} + \ln(1-x)$$

$$4. u(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$8. z(x) = \sqrt{\ln^2(x) - 1}$$

$$9. t(x) = \lfloor x + \frac{1}{4} \rfloor.$$

Exemple 5 de correction

Prenons par exemple la fonction u ci-dessus.

Vérifier d'abord que son ensemble de définition est $D = [1; \sqrt{2}[$.

u est dérivable en x si :

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{2}$$

Ainsi, $D' =]1; \sqrt{2}[$.

On a bien l'inclusion $D' \subset D$.