**Prérequis : bien connaître les carrés élémentaires :** $1 = 1^2$, $4 = 2^2$

$9 = \dots\dots$ $16 = \dots\dots$ $25 = \dots\dots$ $36 = \dots\dots$ $49 = \dots\dots$ $64 = \dots\dots$ $81 = \dots\dots$

$100 = \dots\dots$ $121 = \dots\dots$ $144 = \dots\dots$ $169 = \dots\dots$ $196 = \dots\dots$ $225 = \dots\dots$ $256 = \dots\dots$ $289 = \dots\dots$

# Equations et inéquations.

## 1 Le premier degré

### 1.1 Équations du premier degré

**Exemple 1**
Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\frac{x-1}{3} + \frac{4(2x-3)}{9} = \frac{5x+1}{8}$$

on réduit au même dénominateur $$\frac{24(x-1)}{72} + \frac{8 \times 4(2x-3)}{72} = \frac{9 \times (5x+1)}{72}$$

$$24x - 24 + 64x - 96 = 45x + 9$$

On isole l'inconnue $$24x + 64x - 45x = 9 + 24 + 96$$

$$43x = 129$$

$$x = \frac{129}{43}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{129}{43}\right\}}$$

Résoudre les équations :

1) $3x - 5 = 6x + 2$

2) $-2x - 50 = -3x + 20$

3) $2(x-6) + 7(2x-3) = 2 - 6x$

4) $\dfrac{x-5}{6} + \dfrac{x-9}{3} = \dfrac{2x-7}{9}$

5) $\dfrac{3x-1}{7} + \dfrac{3x-4}{7} = \dfrac{6x+5}{14}$

6) $\dfrac{2x+3}{5} = \dfrac{2(2x-3)}{3} + \dfrac{2}{5}$

7) $\dfrac{x+1}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{x+2}{7}$

8) $\dfrac{2(3x-2)}{5} - \dfrac{2x-3}{2} = \dfrac{3x+5}{4}$

9) $\dfrac{2x+9}{6(x+1)} + \dfrac{5x+1}{2} = \dfrac{4x+5}{2}$

10) $\dfrac{2x-3}{3} = 1 + \dfrac{2-x}{3}$

### 1.2 Inéquations du premier degré

**Exemple 2**
Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$2x + 1 < 7 - 5x$$

on isole l'inconnue $$2x + 5x < 7 - 1$$

on réduit $$7x < 6$$

$$x < \frac{6}{7}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = ]-\infty\ \frac{6}{7}[}$$

Quelles sont les valeurs de $x$ pour lesquelles on a :

1) $2x - 7 > 0$

2) $4x + 12 < 0$.

3) $\dfrac{3}{4}x + 3 < x + \dfrac{9}{4}$

4) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{3} + 1 > \dfrac{x}{6} + 1$

5) $\dfrac{x+5}{4} - \dfrac{x-3}{6} > \dfrac{x}{3}$

6) $x - \dfrac{x+1}{3} > \dfrac{2x+1}{5}$

*Equations et inéquations*

### 1.3 Avec des paramètres

**Le principe de résolution :** on cherche à exprimer l'inconnue en fonction du ou des paramètres.

**Exemple 3**
On se propose de résoudre l'équation $x-2mx+4m^2=0$ de paramètre $m$.
C'est une équation du premier degré en $x$, on cherche à isoler l'inconnue $x$.
Les équations suivantes sont équivalentes :

$$x-2mx+4m^2=0$$

on isole l'inconnue $\quad x(1-2m)=-4m^2$

Deux cas se présentent :

**si** $1-2m=0$ ie si $m=\dfrac{1}{2}$. Dans ce cas, l'équation qui s'écrit $0x=-4\times\dfrac{1}{2^2}=-1$ n'a pas de solutions.

$$\boxed{\mathscr{S}_{m=\frac{1}{2}}=\emptyset}$$

**si** $m\neq\dfrac{1}{2}$ alors l'équation est équivalente à $x=\dfrac{-4m^2}{1-2m}=\dfrac{4m^2}{2m-1}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{m\neq\frac{1}{2}}=\{\frac{4m^2}{2m-1}\}}$$

Résoudre et discuter les équations paramétriques suivantes :

1) $m(x-m)=x-1$

2) $\dfrac{mx-3}{2}=\dfrac{2x+3}{m}$

3) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{m+1}{x+m}=1$

4) $\dfrac{x}{m+1}+\dfrac{x}{m-1}=\dfrac{1}{m^2-1}$

5) $\dfrac{1-mx}{m-x}=\dfrac{1+mx}{m+x}$

6) $\dfrac{mx+1}{1+m}+\dfrac{mx-1}{1-m}=\dfrac{1}{1-m}$

# 2 Le second degré

## 2.1 Factorisation

Factoriser les trinômes suivants :

1) $x^2-5x+6$

2) $18x^2+60x+50$

3) $-3x^2+24x-45$

4) $50x^2-140x+98$

5) $4x^2+4x-8$

6) $-5x^2-10x+15$

7) $3x^2-2x\sqrt{3}+1$

8) $2x^2-2x\sqrt{10}+5$

9) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$

10) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{10}$

## 2.2 Equations du second degré

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2-14x+35=0$

2) $x^2+16x+63=0$

3) $x^2-11x=-28$

4) $6x^2-25x+10=x^2+6x-20$

5) $(2x^2+5x)(x^2-8x+15)(7x^2-27x-4)=0$

6) $(4x-7)(x^2-5x+4)(2x^2-7x+3)=0$

7) $(2x^2-x-1)^2-(x^2-7x+6)^2=0$ $(x^3-4x^2+5)^2=(x^3-6x^2+12x-5)^2=0$

8) $x^4-34x^2+225=0$

9) $x^4-7x^2+144=0$

*Equations et inéquations*

### 2.3 Cas particulier du second degré

On donne une solution évidente $x'$, trouver la seconde $x''$.

1) $3x^2 - 10x + 7 = 0$ et $x' = 1$
2) $5x^2 + 9x + 4 = 0$ et $x' = -1$
3) $2x^2 + x - 10 = 0$ et $x' = 2$
4) $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ et $x' = -2$
5) $(m+3)x^2 - \left(m^2 + 5m\right)x + 2m^2 = 0$ et $x' = m$
6) Soit l'équation : $x^2 - 14x + 29 = 0$.
   (a) Vérifier que cette équation a deux racines. Trouver leur somme et leur produit.
   (b) Calculer les expressions : $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$ et $x'^2 + x''^2$.

### 2.4 Etude de signes

Etudier selon les valeurs de $x$ le signe des expressions suivantes :

1) $x^2 - 3x + 2$
2) $-x^2 + 2x - 1$
3) $x^2 - x + 1$
4) $x^2 - 5x + 6$
5) $-x^2 + 6x - 9$
6) $5x^2 - 7x - 12$
7) $(7x+3)(3x-2)$
8) $(2x-3)(4x-1)$
9) $(x-3)(3x-4)(x+3)$
10) $(x^2-9)(x^2+x+1)$
11) $(x+1)^2 - 9x^2$
12) $(4x+5)^2 - 49$
13) $x^2 - (2x+1)^2$

### 2.5 Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $3x^2 - 11x + 8 > 0$
2) $15x^2 - 14x + 3 < 0$
3) $49x^2 - 70x + 25 > 0$
4) $4x^2 - 19x < -5$
5) $(2x-7)(15-3x) < 0$
6) $(4x-7)(x^2-5x+4) \geqslant 0$
7) $(x^2+5x-6)^2 - 9(x^2-4x+3)^2 > 0$
8) $(x^3-4x^2+5)^2 < (x^3-6x^2+12x-5)^2 = 0$
9) $x^4 - 34x^2 + 225 < 0$

### 2.6 Avec des fractions

**Le principe de résolution :** on se ramène à $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$.

*Cas particulier :* $\dfrac{A(x)B(x)}{C(x)D(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$ et $D(x) \neq 0$.

**Exemple 4**
Les équations suivantes sont équivalentes

$$\frac{x-4}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} = 2$$

On réduit au même dénominateur $$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)} + \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

On se ramène à une fraction nulle $$\frac{x^2 - 7x + 12 + x^2 - 4x + 4}{(x-2)(x-3)} - \frac{2x^2 - 10x + 12}{(x-2)(x-3)} = 0$$

On réduit $$\frac{2x^2 - 11x + 16 - 2x^2 + 10x - 12}{(x-2)(x-3)} = 0$$

$$\frac{-x+4}{(x-2)(x-3)} = 0$$

$$-x + 4 = 0 \text{ et } x - 2 \neq 0 \text{ et } x - 3 \neq 0$$

$$\frac{-x+4}{(x-2)(x-3)} = 0$$

$$x = 4 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } x \neq 3$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$$

Résoudre les équations suivante :

1) $\dfrac{2x+1}{x-1}+\dfrac{3(x-1)}{x+1}=2$

2) $\dfrac{x+4}{2x-3}+\dfrac{2x-3}{x+4}=2$

3) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-9}=\dfrac{1}{2}$

4) $\dfrac{2x+5}{2x}-\dfrac{x}{x+5}=1$

5) $\dfrac{x-3}{5}+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{89}{40}$

6) $\dfrac{5}{x+8}-\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{7}{9x}$

7) $\dfrac{12}{2x-5}-\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{1}{3(x+1)}$

## 2.7 Avec des paramètres

**Le principe de résolution :** on cherche à exprimer l'inconnue en fonction du ou des paramètres.

**Exemple 5**

On se propose de résoudre l'équation $x^2-3mx+2m^2=0$ de paramètre $m$.

C'est une équation du second degré en $x$, le discriminant $\Delta=(-3m)^2-4\times 2m^2=m^2$ est positif ou nul selon que $m$ soit nul ou non nul.

✗✗✗ ATTENTION ! on rappelle que $\sqrt{m^2}=|m|$.

*Deux cas se présentent :*

**si** $m=0$ alors l'équation n'a qu'une seule solution $x_0=\dfrac{3m}{2}=0$.

Dans ce cas : $\boxed{\mathscr{S}_{m=0}=\{0\}}$.

**Si** $m\neq 0$ alors l'équation possède deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{3m+|m|}{2}=\begin{cases}2m \text{ si } m>0\\ m \text{ si } m<0\end{cases}$ et $x_2=\dfrac{3m-|m|}{2}=\begin{cases}m \text{ si } m>0\\ 2m \text{ si } m<0\end{cases}$.

Dans ce cas : $\boxed{\mathscr{S}_{m\neq 0}=\{m;\ 2m\}}$.

Résoudre les équations paramétriques suivantes :

1) $x^2-ax-a^2=0$

2) $x^2+3\mathrm{R}x-4\mathrm{R}^2=0$

3) $x^2-(m+1)x+m^2=0$

4) $x^2-(a+b)x+ab=0$

5) $x^2+(3a-2b)x-6ab=0$

6) $\dfrac{2x+m}{x}-\dfrac{2x}{x+m}=2$

7) $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{x}$

8) $x^2-5mx+4m^2=0$

9) $x^2+4ax-5a^2=0$

10) $x^2-4\mathrm{R}x+\mathrm{R}^3=0$

11) $x^2-(2m+1)x+2m^2=0$

12) $x^2-2ax+a^2-1=0$

13) $3x^2-2(3a-1)x-4a=0$

14) $\dfrac{x}{x-m}+\dfrac{x-m}{4x}=1$

15) $\dfrac{3}{x+2a}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{x+a}$

## 2.8 Avec des radicaux

**Le principe de résolution :** on cherche à ramener l'équation sous la forme $A = \sqrt{B}$ puis on applique l'équivalence suivante :

$$A = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = B \\ A \geqslant 0 \end{cases}$$

**Exemple 6 Les équations suivantes sont équivalentes :**

$$x - \sqrt{2x-3} = 3$$
$$\text{on isole la racines } x - 3 = \sqrt{2x-3}$$
$$\text{on élève au carré } (x-3)^2 = 2x - 3 \text{ et } x - 3 \geqslant 0$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0 \text{ et } x \geqslant 3$$

Le discriminant de $x^2 - 8x + 12$ vaut $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 12 = 64 - 48 = 16$, les deux racines de $x^2 - 8x + 12$ sont donc $x_1 = \dfrac{8-4}{2} = 2 < 3$ et $x_2 = \dfrac{8+4}{2} = 6 > 3$

Seule $x_2$ convient ici, l'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{6\}$.

Résoudre les équations suivantes :

1) $x + 2\sqrt{x^2 - 3} = 6$
2) $x - \sqrt{(3x - 11)} = 3$
3) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+4} = 4$
4) $\sqrt{x+50} - 2\sqrt{x-25} = 8$
5) $2x + \sqrt{(x-5)(x+1)} = 18$
6) $\sqrt{10x-3} + \sqrt{5x-3} = 5\sqrt{3}$.
7) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{5-8x} = \sqrt{4x+7}$.

*Equations et inéquations*